UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Dpto. de Cómputo Científico y Estadística
Cómputo Científico CO-3211

LABORATORIO #4

Descomposición LU y Cholesky.

DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

1. La siguiente ecuación diferencial representa el estado de equilibrio o distribución steady-state de la temperatura en una barra uniforme de longitud 1:

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0) &= c_0, \\ u(1) &= c_1, \end{aligned} \tag{1}$$

donde f es la tasa de producción de energía térmica y los valores c_0 y c_1 se denominan condiciones de frontera tipo Dirichlet y representan valores fijos de temperatura en los extremos de la barra.

Para resolver el problema (1) utilizando el método de diferencias finitas y con condiciones de frontera $c_0 = c_1 = 0$, se colocan $n+1$ puntos en la barra, $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}$, distribuidos uniformemente y con los extremos incluidos, obteniéndose la siguiente representación matricial del problema:

$$A\,\hat{u} = \hat{f}$$

donde A es la matriz tridiagonal de orden $(n-1)\times(n-1)$,

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots \\ & . & . & . & \\ \cdots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$h = \frac{1}{n}$, el vector $\hat{u}$ es el vector de incógnitas (la solución buscada) y el vector $\hat{f}$ es la función f evaluada en los puntos internos de la barra, i.e.

$$\hat{f} = \begin{bmatrix} f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

Resuelva este problema utilizando el algoritmo de descomposición LU para matrices tridiagonales y función $f(x) = x$. Grafique la solución para visualizar la distribución de temperatura.

2. Implemente el algoritmo de factorización LU general y el de Cholesky y calcule las factorizaciones de las siguientes matrices:

(a) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 4 & 10 \\ 3 & -13 & 3 & 3 \\ -6 & 4 & 2 & -18 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & 1 \\ 8 & 16 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$